

## ***II.2.5. Fenomenologia curgerii***

Ecuatiile generale de conservare se aplica la miscarea fluidelor reale in sisteme geometrice intalnite curent in instalatiile industriale cum ar fi: *curgerea in conducte, curgerea in jurul corpurilor imersate, curgerea in film subtire, curgerea in aparate tip coloana*, etc. Indiferent de caz problemele care trebuiesc rezolvate si care sunt indispensabile proiectarii si exploatarii utilajelor sunt:

- *stabilirea distributiei vitezelor in sectiunea de curgere;*
- *calculul vitezei medii si a debitului mediu in sectiunea de curgere;*
- *distributia tensiunilor tangentiale in sectiunea de curgere;*
- *determinarea caderii de presiune datorita frecarilor si a inertiei pe traseul de curgere considerat.*

Marimile prezentate mai sus depind de *geometria sistemului*, de caracterul *laminar sau turbulent* al curgerii cat si de *comportarea reologica a fluidului*.

Intensitatea curgerii are o influenta deosebita asupra celorlalte *procese de transfer* (de caldura si de masa) care insotesc transferul de impuls in utilajele in care se realizeaza operatii ale transferului de caldura sau de masa.

Datorita complexitatii mecanismului turbulent al transferului de proprietate (*impuls, caldura sau masa*) tratarea matematica a curgerii turbulente este limitata. Un rol important o au, in aprecierea cantitativa a parametrilor hidrodinamici, determinarile experimentale.

Deoarece caracterul turbulent al curgerii prezinta o serie de particularitati care influenteaza parametrii hidrodinamici, se prezinta caracteristicile principale ale *curgerii turbulente*.

## ***II.2.5.1. Curgerea turbulenta***

Curgerea turbulenta se dezvolta atunci *cand forta motoare a curgerii este mai mare decat forta de frecare* ceea ce determina forte inertiiale mult mai mari in fluid. In aceste conditii fluidul nu mai curge in straturi paralele, acesta se amesteca intens cu formare de *vartejuri* sau *turbioane* care se deplaseaza dezordonat. Pe langa miscarea preponderenta pe directia de curgere, particulele macroscopice de fluid executa miscari si in alte directii.

Dimensiunile turbioanelor variaza intre o dimensiune maxima ( care la curgere in conducte este diametrul conductei) si o dimensiune minima de aproximativ **1 mm** (care contine aproximativ  $10^{16}$  molecule)

Miscarea haotica a vorturilor complica descrierea cantitativa, riguroasa a acestei curgeri deoarece parametrii curgerii (*viteza, presiunea, tensiunea tangentiala, etc*) au caracter aleatoriu in timp.

De aceea in curgerea turbulenta deosebim : *marimi medii temporale, marimi instantanee si fluctuatii* (sau *pulsatii*) ale marimilor aleatoare considerate.

Daca s-ar masura o astfel de marime aleatorie – de exemplu *viteza* – intr-un punct din interiorul fluidului pe un interval de timp  $t_0$ , si s-ar reprezenta modificarile in timp ale valorilor marimii aleatorii, s-ar constata ca aceste valori prezinta *fluctuatii* (variatii rapide in timp). De exemplu variatia in timp a vitezei la curgerea turbulenta stationara va fi de tipul celei prezentate in figura urmatoare:

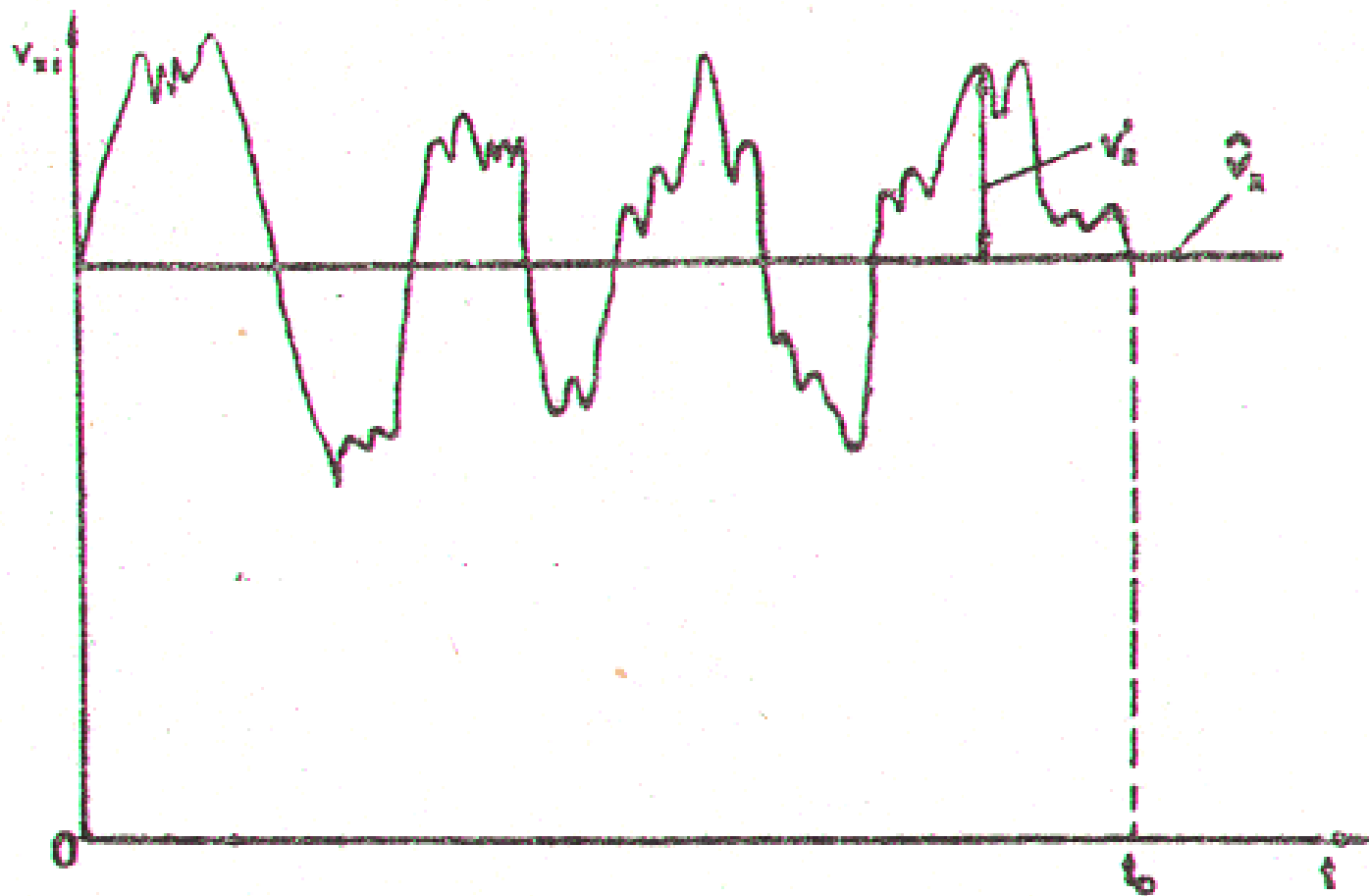


Fig. II.29

Fluctuația vitezei în curgerea turbulentă staționară.

fara

Viteza instantanee,  $v_{xi}$  oscileaza in jurul unei valori medii care, in regim stationar, este constanta in timp si care este denumita *viteza medie temporala*,  $\hat{v}_x$ . Viteza medie temporala este o medie in timp a tuturor vitezelor instantanee, adica:

$$\hat{v}_x = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} v_{xi} dt \quad (\text{II.129})$$

Diferenta dintre viteza instantanee si viteza medie temporala este *fluctuatia vitezei*,  $v'_x$ :

$$v'_x = v_{xi} - \hat{v}_x \quad (\text{II.130})$$

Valoarea medie in timp a fluctuatiilor este zero, asa cum rezulta din calculul urmator:

$$\hat{v}'_x = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} v'_x dt = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} v'_{xi} dt - \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \hat{v}_x dt = \hat{v}_x - \hat{v}_x = 0 \quad (\text{II.131})$$

**fara** Pentru descrierea curgerii turbulente Reynolds a modificat ecuatia de continuitate si ecuatiile Navier-Stokes de la curgerea laminara inlocuind componentele vitezei si ale presiunii prin *vitezele si presiunile instantanee*. Se obtine astfel:

$$\begin{aligned}
 & \rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\hat{v}_x + v'_x) + (\hat{v}_x + v'_x) \frac{\partial}{\partial x} (\hat{v}_x + v'_x) + \right. \\
 & \left. + (\hat{v}_y + v'_y) \frac{\partial}{\partial y} (\hat{v}_x + v'_x) + (\hat{v}_z + v'_z) \frac{\partial}{\partial z} (\hat{v}_x + v'_x) \right] = \\
 & = \rho g_x - \frac{\partial}{\partial x} (\hat{P} + P') + \eta \nabla^2 (\hat{v}_x + v'_x) \quad (II.132)
 \end{aligned}$$

fara

Dupa medierea in timp a termenilor ecuatiei anterioare se obtine in final:

$$\rho \left[ \frac{\partial \hat{v}_x}{\partial t} + \hat{v}_x \frac{\partial \hat{v}_x}{\partial x} + \hat{v}_y \frac{\partial \hat{v}_x}{\partial y} + \hat{v}_z \frac{\partial \hat{v}_x}{\partial z} \right] = \rho g_x - \frac{\partial \hat{P}}{\partial x} +$$
$$\eta \left[ \frac{\partial^2 \hat{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}_x}{\partial z^2} \right] + \left[ \frac{\partial \hat{\tau}_{xx}^t}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\tau}_{yx}^t}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\tau}_{zx}^t}{\partial z} \right]$$

(II.133)

Ecuatia de mai sus contine termeni suplimentari in ultima paranteza care au fost denumiti *tensiuni Reynolds* sau *tensiuni turbulente*. Tensiunile turbulente se determina din relatii semiempirice.



## ***II.2.5.2. Stratul limita hidrodinamic si distributia vitezelor in interiorul unui fluid in curgere***

Pentru a elimina neconcordantele rezultate din utilizarea modelului de fluid ideal, *Prandtl* a introdus conceptul de *strat limita hidrodinamic*.

Conform *teoriei stratului limita* elaborata de *Prandtl*, in vecinatatea unei suprafete solide scaldata de un fluid in curgere se formeaza o zona in care curgerea este diferita. In zona adiacenta conturului rigid, denumita *strat limita hidrodinamic*, caracterul curgerii este determinat de actiunea fortelor moleculare, ceea ce determina gradienti de viteza mari si, implicit, valori mari ale tensiunilor tangentiale. Din acest motiv stratul limita mai este denumit *strat de frecare*.

In zona exterioara stratului limita viteza fluidului este practic constanta deoarece tensiunile tangentiale sunt nule, si deci fluidul poate fi considerat ideal.

Grosimea stratului limita,  $\delta$ , este egala cu distanta masurata de la suprafata solida pe directia normala la directia de curgere, la care viteza fluidului atinge 0,99 din viteza curentului principal.

In continuare se prezinta modul de formare a stratului limita si distributia vitezelor pentru unul dintre cele mai cunoscute modele de curgere – *curgerea prin conducte cu sectiunea circulara*.

## ***II.2.5.2.1. Stratul limita si distributia vitezelor la curgerea prin conducte cu sectiunea circulara***

### **a) Stratul limita si distributia vitezelor la curgerea laminara in conducte cu sectiune circulara**

Formarea stratului limita la curgerea prin conducte cu sectiunea circulara prezinta particularitatea ca datorita simetriei cilindrice a acestora, *grosimea maxima a stratului limita este egala cu raza conductei.*

Formarea stratului limita la curgerea laminara in conducte cu sectiunea circulara este prezentata in figura urmatoare:

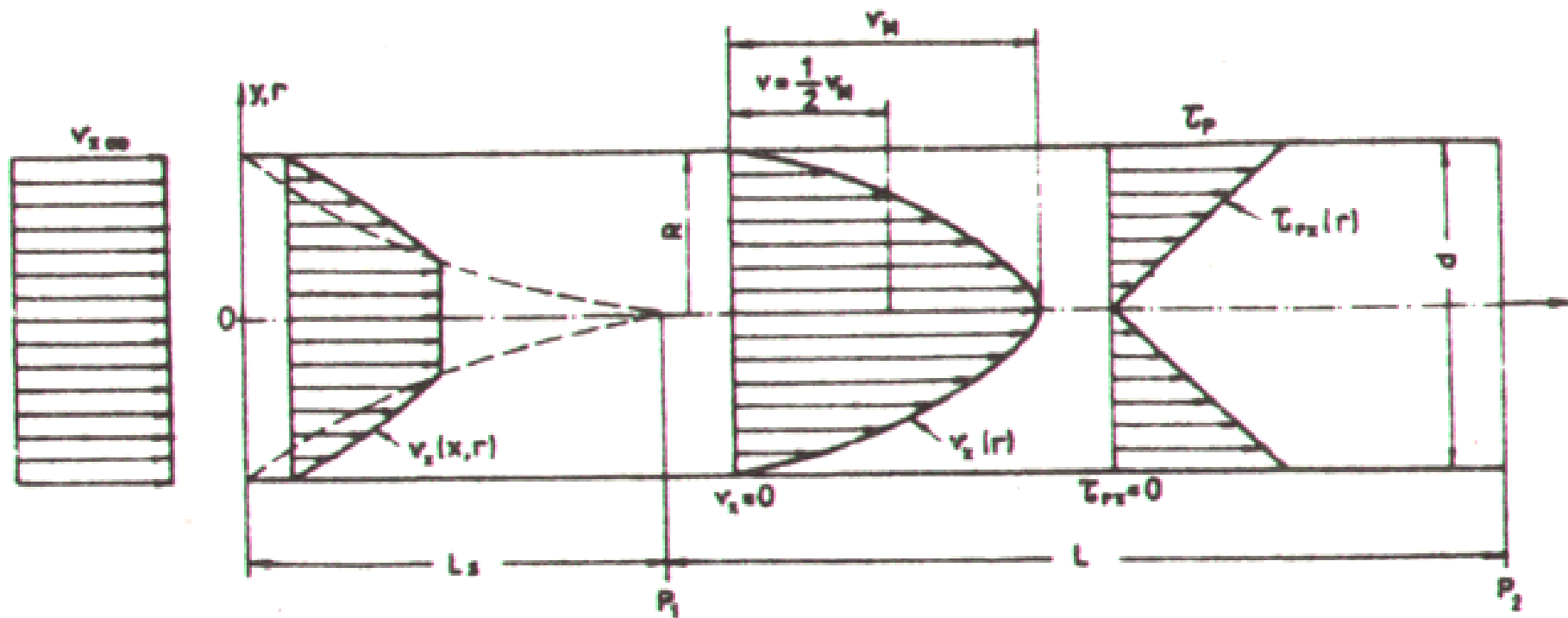


Fig. II.33

Stratul limită, profilul vitezelor și a tensiunilor tangențiale la curgerea laminară în conducte circulare.

La curgerea laminara (pentru  $Re < 2300$ ) formarea stratului limita incepe la intrarea in conducta. Grosimea acestuia creste continuu pe directia de curgere, dar datorita simetriei cilindrice a conductei , grosimea maxima a stratului limita este egala cu raza conductei,  $R$ .

Aceasta grosime se atinge la o distanta  $L_s$  de la capatul de intrare in conducta numita *lungimea de stabilizare a curgerii* sau *lungimea de pornire*.

In zona de stabilizare a curgerii (pentru care  $x < L_s$ ) viteza unui strat,  $v_x$ , depinde atat de raza cat si de distanta  $x$  de la capatul de intrare in conducta.

Pentru  $x > L_s$  profilul vitezelor se stabilizeaza . Aceasta zona a fost denumita *zona de curgere stabilizata*. Aici viteza straturilor concentrice (*curgere telescopica*) variaza numai pe raza, dupa o lege parabolica. Viteza este zero la perete si maxima in axa conductei.

Relatia dintre **Re**, diametrul conductei, **d**, si lungimea de stabilizare, **L<sub>s</sub>**, este de forma:

$$L_s = 0,003 \cdot d \cdot Re \quad , \text{valabila pentru } Re < 2300$$

Profilul vitezelor se determina prin integrarea componentei **x** a ecuatiilor impulsului:

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + \\ & + v_x \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] = \\ & = - \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x \end{aligned} \quad (\text{II.134})$$

Acesta ecuatie se simplifica in urmatoarele conditii:

– regim stationar:  $\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0$

– curgerea dupa o singura directie:

$v_y = v_z = 0$ , respectiv :  $\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} = 0$  si  $\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$

- in zona stabilizata:  $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$

- conducta orizontala:  $g_x = 0$

Cu aceste simplificari ecuatia impulsului devine:

$$-\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.135})$$

Datorita simetriei circulare este mai comod sa lucram in coordonate cilindrice (schimbarea de variabila se face cu relatiile):  $x = x$ ;  $y = r \cos \theta$ ;  $z = r \sin \theta$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{rx})}{\partial r} - \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.136})$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{P_1 - P_2}{L} = -\frac{\Delta P}{L} = \text{const.} \quad (\text{II.137})$$



Deoarece tensiunea tangentiala este functie numai de raza, derivata partiala poate fi inlocuita cu derivata totala:

$$\frac{1}{r} \frac{d(r\tau_{rx})}{dx} = \frac{\Delta P}{L} \quad (\text{II.138})$$

de unde:

$$d(r\tau_{rx}) = \frac{\Delta P}{L} \int r \cdot dr \quad (\text{II.139})$$

$$r\tau_{rx} = \frac{\Delta P}{2L} r^2 + C_1 \quad (\text{II.140})$$

Din conditia ca relatia de mai sus sa fie valabila pentru oricare  $r \in [0, R]$ , inclusiv pentru  $r=0$ , rezulta  $C_1 = 0$ .

$$\tau_{rx} = \frac{\Delta P}{2L} r \quad (\text{II.141})$$

Rezulta ca tensiunea de forfecare variaza liniar cu raza conductei, avand valoarea zero in axa conductei si valoarea maxima la peretele conductei:

$$\tau_p = \frac{\Delta P \cdot R}{2L} \quad (\text{II.142})$$

Pentru fluide newtoniene supuse la forfecare simpla:

$$\tau_{rx} = -\eta \frac{dv_x}{dr} \quad (\text{II.143})$$

Prin combinarea relatiilor anterioare rezulta o ecuatie diferentiala cu variabile separabile:

$$-\eta \frac{dv_x}{dr} = \frac{\Delta P}{2L} r \quad (\text{II.144})$$

Dupa separarea variabilelor si integrare se obtine:

$$v_x(r) = -\frac{\Delta P}{4\eta L} r^2 + C_2 \quad (\text{II.145})$$

Constanta de integrare  $C_2$  se determina *din conditia lipsei alunecarii la perete*, din care rezulta conditia limita: la  $r=R$ ,  $v_x=0$ . Din aceasta conditie rezulta:

$$C_2 = \frac{\Delta P}{4\eta L} R^2 \quad (\text{II.146})$$

Iar distributia vitezelor va fi data de relatia:

$$v_x(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2) \quad (\text{II.147})$$

care se mai scrie si in forma:

$$v_x(r) = \frac{\Delta PR^2}{4\eta L} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (\text{II.148})$$

Viteza are valoarea maxima,  $v_M$ , in axa conductei

$$v_M = \frac{\Delta PR^2}{4\eta L} \quad (\text{II.149})$$

Cunoscand functia care da distributia vitezelor in sectiunea conductei, se poate calcula viteza medie in conducta aplicand relatia de definitie pentru aceasta marime:

$$v = \frac{1}{S_c} \int_0^{S_c} v_x(S) dS \quad (\text{II.150})$$

in care :  $S_c = \pi R^2$  este sectiunea conductei  
iar  $S = \pi r^2$  este sectiunea curenta.

deci:

$$v = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi v_x(r) r dr \quad (\text{II.151})$$

Tinand cont de expresia functiei  $v_x(r)$ , rezulta :

$$v = \frac{\Delta P}{2\eta L R^2} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{\Delta P R^2}{8\eta L} \quad (\text{II.152})$$

Se poate calcula ca raportul dintre viteza medie si viteza maxima este:

$$\frac{v}{v_M} = \frac{1}{2} \quad (\text{II.153})$$

Cu viteza medie se calculeaza debitul volumic mediu :

$$M_v = v \cdot S_c = v\pi R^2 = \frac{\pi\Delta PR^2}{8\eta L} = \frac{\pi\Delta P d^2}{128\eta L} \quad (\text{II.154})$$

## ***b) Stratul limita si distributia vitezelor la curgerea turbulenta in conducte cu sectiunea circulara***

In cazul *curgerii turbulente* in conducte ( $Re > 10.000$ ) structura stratului limita este diferita de cea de la regimul laminar. Si in acest caz, la intrarea in conducta se formeaza un *strat limita laminar* a carui grosime creste pana la o valoare la care curgerea in stratul limita devine instabila, transformandu-se in curgere turbulenta. Dupa o anumita distanta de la capatul de intrare, stratul limita se separa intr-un *substrat* si un *strat limita turbulent*, cele doua zone fiind despartite de o *zona tampon*, de tranzitie, in care curgerea este intermediara (se poate transforma din laminara in turbulenta sau invers).



Distanța de la capatul conductei la care grosimea stratului limita turbulent devine egală cu raza conductei este tot o lungime de stabilizare (sau de pornire),  $L_s$ , dar în cazul curgerii turbulente valoarea acesteia nu depinde practic de criteriul Reynolds și se poate calcula cu relația aproximativă:

$$L_s = (40 \div 60) \cdot d \quad (\text{II.155})$$

Structura stratului limita la curgerea turbulentă prin conducte circulare este prezentată în figura de mai jos:

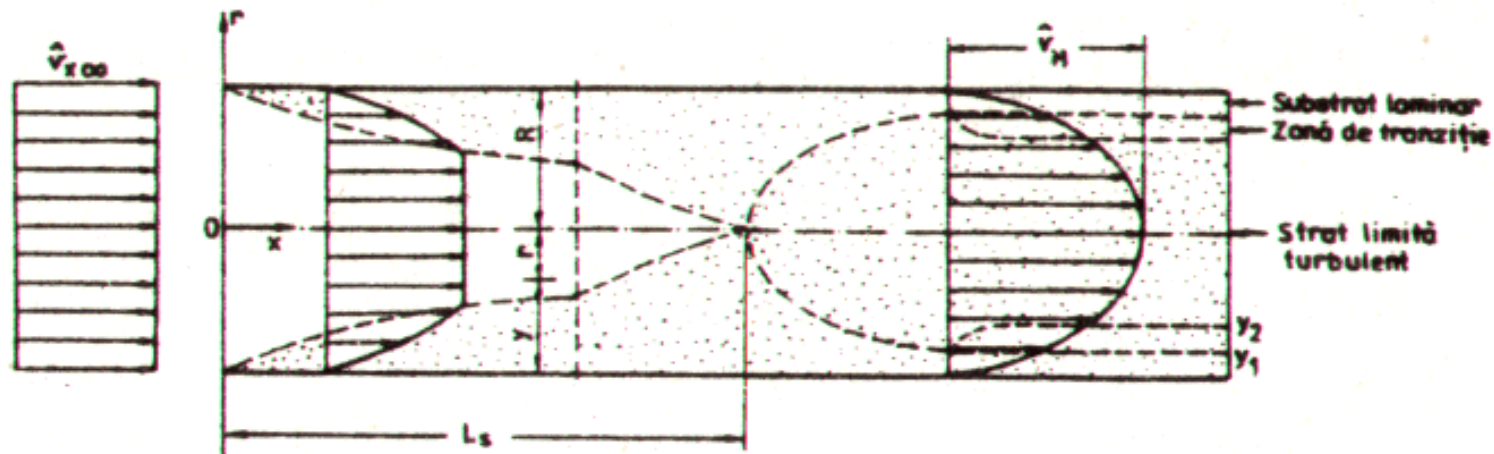


Fig. II.34

Structura stratului limită și profilul vitezelor la curgerea turbulentă într-o conductă circulară.

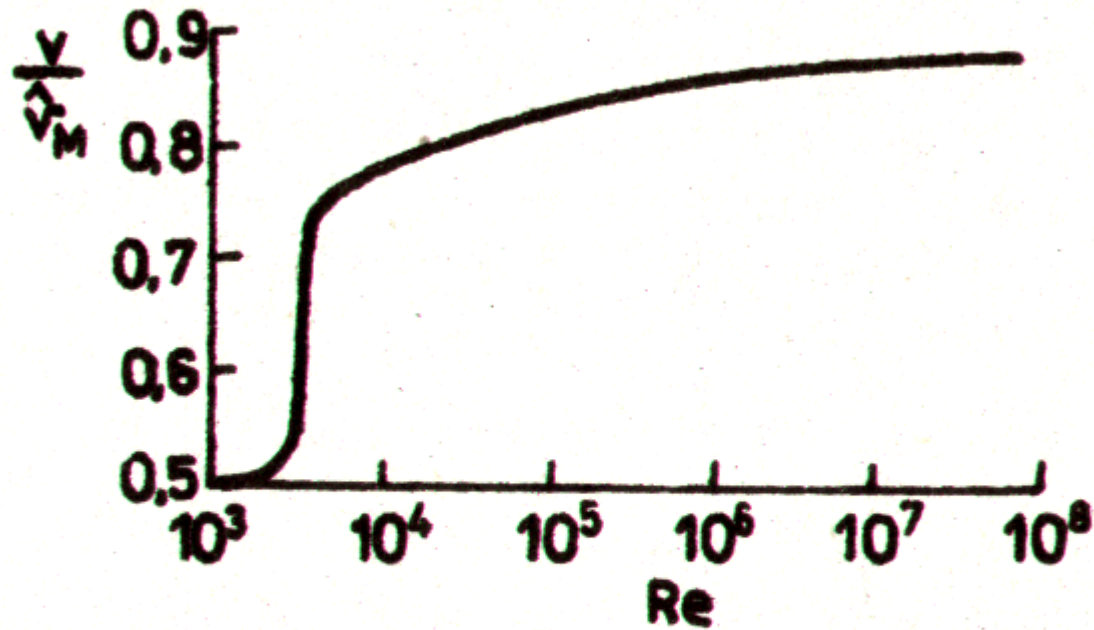
In zona stabilizata ( $x > L_s$ ) profilul vitezelor pe sectiunea conductei este stabilizat, si este dat de o parabola cu varful aplatizat.

Distributia *vitezelor medii temporale*,  $\hat{V}_x$  intr-o sectiune a conductei din *zona de curgere stabilizata* poate fi dedusa pe baza *teoriei lungimii de amestec a lui Prandtl*.

La curgerea turbulenta raportul dintre viteza medie in conducta,  $v$ , si viteza maxima,  $\hat{V}_M$ , din axa conductei, nu mai este constant, ci depinde de valoarea criteriului Reynolds.

Dependentia  $\frac{v}{\hat{V}_M} = f(\text{Re})$  s-a stabilit experimental si

este prezentata sub forma unui grafic de tipul celui din figura urmatoare:



**Fig. II.35**

**Dependența raportului  $v/v_M$  de Reynolds, în regim intermediar și turbulent.**