II.2.4.3. Ecuatia de conservare a energiei pentru sisteme macroscopice (ecuatia Bernoulli)

Curgerea unui fluid este cauzata de o forta care se exercita asupra acestuia, ceea ce *implica un consum de energie*. Acest consum de energie poate fi calculat dintr-un bilant al energiilor care intervin la curgerea fluidului.

Bilantul energiilor pentru curgerea neizoterma aplicat asupra unui volum de dimensiuni infinit mici conduce la o ecuatie diferentiala foarte complicata denumita *ecuatia energiei*.

Pentru cazul mai simplu al curgerii printr-un sistem macroscopic ecuatia care exprima conservarea energiei este mai simpla si se numeste *Ecuatia Bernoulli.*

Pentru deducera acestei ecuatii se considera un sistem macroscopic format dintr-o conducta cu sectiunea variabila, amplasata intr-o pozitie oarecare. Volumul de control pentru care se intocmeste bilantul energiilor este delimitat de peretele interior al conductei si se sectiunile S_1 si S_2 situate la inaltimile H_1, respectiv H_2 fata de un plan de referinta.

Pe aceasta portiune de conducta unitatea de masa a fluidului primeste din exterior lucrul mecanic L_M si cantitatea de caldura, Q.

$$\frac{dE}{dt} = \sum E_i - \sum E_e \qquad \text{(II.112)}$$

in regim stationar:

$$\sum E_i = \sum E_e \qquad \text{(II.113)}$$

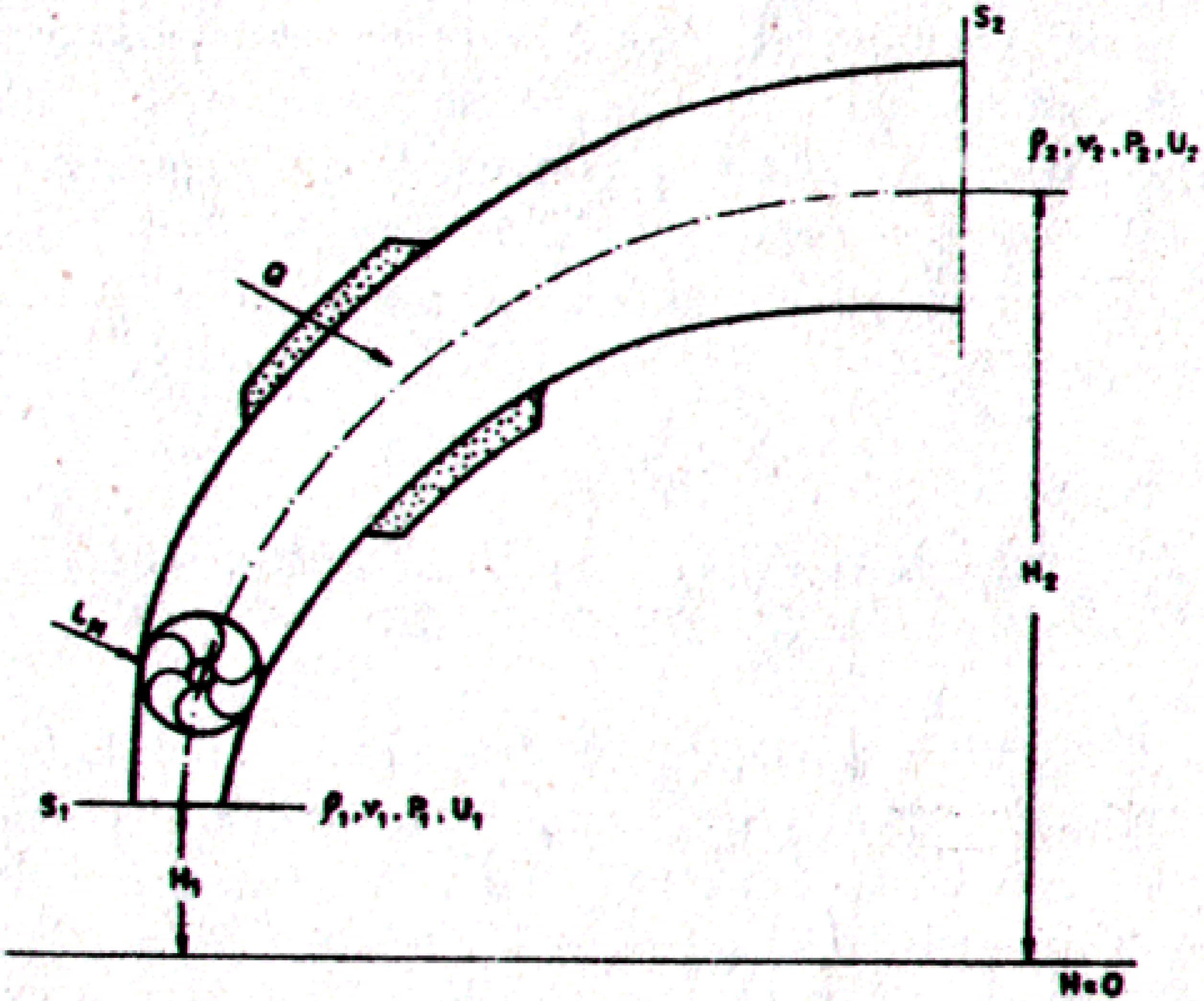

Fig. II.26
Volumul de control al unui sistem macroscopic utilizat pentru deducerea ecuaţiei Bernoulli.

Energiile care intervin la curgerea fluidului in sistemul considerat, raportate la unutatea de masa de fluid sunt:

- *la intrarea in sistem prin sectiunea* S_1 :
  - energia potentiala: gH_1
  - energia cinetica: $\frac{1}{2}v_1^2$
  - energia data de presiunea statica: P_1V_{s1}
  - energia interna a fluidului: U_1
  - energia mecanica: L_M
  - energia calorica: Q

- *la iesirea din sistem prin sectiunea* S_2

– energia potentiala: gH_2

– energia cinetica: $\frac{1}{2}v_2^2$

– energia data de presiunea statica: P_2V_{s2}

– energia interna a fluidului: U_2

In aceste expresii: **g** este constanta acceleratiei gravitationale; **H** – inaltimea; **v** – viteza medie; **P** – presiunea statica; iar $V_s = \frac{1}{\rho}$ este volumul specific.

Inlocuind expresiile energiilor in ecuatia de bilant, pentru curgerea in regim stationar, se obtine:

$$gH_1 + \frac{1}{2}v_1^2 + P_1V_{s1} + U_1 + L_M + Q =$$

$$gH_2 + \frac{1}{2}v_2^2 + P_2V_{s2} + U_2 \qquad \text{(II.114)}$$

Relatia anterioara se expliciteaza in raport cu lucrul mecanic consumat din exterior si rezulta:

$$L_M = g(H_2 - H_1) + \frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) + \left(P_2V_{s2} - P_1V_{s1}\right) + \left(U_2 - U_1\right) - Q$$

(II.115)

Este incomod a se lucra cu energii interne si de aceea se exprima variatia energiei interne $\Delta U = U_2 - U_1$, conform principiului I al termodinamicii:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = Q^l - \int_{V_{s1}}^{V_{s2}} P dV_s \qquad \text{(II.116)}$$

in care: Q^l este caldura totala din sistem, data de suma dintre caldura introdusa din exterior **Q**, si caldura rezultata in urma disiparii a unei parti din energia fluidului, E_p ca urmare a frecarilor si a inertiei:

$$Q' = Q + Ep \qquad \text{(II.117)}$$

Printr-un artificiu de calcul, variatia energiei statice poate fi exprimata astfel:

$$P_2V_{s2} - P_1V_{s1} = \int_{P_1V_{s1}}^{P_2V_{s2}} d(PV_s) = \int_{V_{s1}}^{V_{s2}} PdV_s + \int_{P_1}^{P_2} V_s dP \qquad \text{(II.118)}$$

Care dupa inlocuire in expresia lucrului mecanic si a simplificarilor corespunzatoare conduce la:

$$L_M = g(H_2 - H_1) + \frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) + \int_{P_1}^{P2} V_s dP + E_p \qquad \text{(II.119)}$$

Relatia de mai sus este *ecuatia lui Bernoulli* in forma generala. Rezolvarea integralei din ecuatia de mai sus necesita cunoasterea *ecuatiei de stare a fluidului*: ρ=f(P,T).

a) *Pentru fluide necompresibile in curgere izoterma, ρ=constant*, si deci volumul specific: $V_s=1/\rho$, este independent de presiune. In acast caz:

$$\int_{P_1}^{P_2} V_s dP = \frac{1}{\rho}\int_{P_1}^{P_2} dP = \frac{P_2 - P_1}{\rho} \qquad \text{(II.120)}$$

$$L_M = g(H_2 - H_1) + \frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + E_p \qquad \text{(II.121)}$$

In ecuatia de mai sus fiecare termen are dimensiunea unei energii raportata la unitatea de masa:

$$[gH]_{SI} = \frac{m}{s^2}m = \frac{kg \cdot m \cdot m}{s^2 \cdot kg} = \frac{N \cdot m}{kg} = \frac{J}{kg}$$

Ecuatia lui Bernoulli in forma data de relatia anterioara poate fi interpretata astfel: lucrul mecanic de exterior L_M este folosit pentru:

- *cresterea energiei potentiale a fluidului*, exprimata prin termenul, $g(H_2 - H_1)$;

- *cresterea energiei cinetice a fluidului*, exprimata prin termenul, $\frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right)$;

- *invingerea eventualelor diferente de presiune statica intre sectiunile sistemului*, $\frac{P_2 - P_1}{\rho}$;

- *acoperirea pierderilor de energie determinate de frecari si de inertie*, E_p

In calculele ingineresti ecuatia Bernoulli se utilizeaza si in alte forme:

- *ecuatia Bernoulli in termeni de presiuni:*

$$L_M\rho = \Delta P_T = \rho g\left(H_2 - H_1\right) + \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right) + \left(P_2 - P_1\right) + \rho E_p \qquad \text{(II.122)}$$

in care fiecare termen are *dimensiunile unei presiuni*: $\frac{N}{m^2} = \frac{J}{m^3}$

Intr-o forma mai restransa:

$$\Delta P_T = \Delta P_g + \Delta P_d + \Delta P_s + \Delta P_p \qquad \text{(II.123)}$$

unde:

$$\Delta P_g = \rho g (H_2 - H_1) \qquad \Delta P_d = \frac{1}{2}\rho (v_2^2 - v_1^2)$$

$$\Delta P_s = P_2 - P_1 \qquad \Delta P_p = \rho E_p$$

- ecuatia lui Bernoulli in termeni de inaltimi. Se obtine prin impartirea ecuatiei exprimata in presiuni la ρg:

$$\frac{L_M}{\rho} = H_M = (H_2 - H_1) + \frac{1}{2g}(v_2^2 - v_1^2) + \frac{(P_2 - P_1)}{\rho g} + \frac{E_p}{g} \qquad (II.124)$$

Raportul $\frac{L_M}{g} = H_M$ se numeste *inaltimea manometrica a sistemului*, si reprezinta ca semnificatie fizica, inaltimea unei coloane de lichid a carei energie potentiala, $\mathbf{gH_M}$, este egala cu enargia mecanica, $\mathbf{L_M}$, consumata pentru transportul in sistemul dat a unitatii de masa de fluid.

$$H_g = H_2 - H_1 \quad \text{(inaltimea geometrica)}$$

$$H_d = \frac{1}{2g}\left(v_2^2 - v_1^2\right) \quad \text{(inaltimea dinamica)}$$

$$H_s = \frac{P_2 - P_1}{\rho g} \quad \text{(inaltimea statica)}$$

$$H_p = \frac{E_p}{g} \quad \text{(pierderile de energie in termeni de inaltime)}$$

Deci:

$$H_M = H_g + H_d + H_s + H_p \qquad \text{(II.125)}$$

Se face precizarea *ca indiferent de modul de exprimare a termenilor ecuatiei lui Bernoulli, semnificatia fizica a fiecarui termen este aceeasi*.

b) *Pentru fluide compresibile (gaze) in curgere izoterma,* densitatea si deci volumul specific depind de presiune.

Dependenta de presiune a volumului specific se obtine din ecuatia de stare a fluidului. Pentru gaze la presiuni moderate ecuatia de stare rezulta din legea gazelor perfecte.

$$PV = nRT \Leftrightarrow P = \frac{m}{V} \cdot \frac{RT}{M} \Leftrightarrow P = \rho \frac{RT}{M}$$

$$V_s = \frac{RT}{MP}$$

Deci:

$$\int_{P_1}^{P_2} V_s dP = \frac{RT}{M} \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{P} = \frac{RT}{M} \ln \frac{P_2}{P_1} \qquad \text{(II.126)}$$

$$L_M = g(H_2 - H_1) + \frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) + \frac{RT}{M} \ln \frac{P_2}{P_1} + E_p \qquad \text{(II.127)}$$

II.2.4.3.1. Aplicatii ale ecuatiei Bernoulli

Ecuatia Bernoulli are numeroase aplicatii ingineresti. Una dintre aplicatii consta in utilizarea valorii lucrului mecanic, $\mathbf{L_M}$, necesar transportului unitatii de masa de fluid intr-un sistem dat – determinat din ecuatia Bernoulli – pentru calculul puterii necesare motoarelor ce actioneaza utilajele de transport (pompe, ventilatoare, suflante etc.).

Produsul dintre lucrul mecanic, $\mathbf{L_M}$, si debitul masic de fluid, $\mathbf{M}_m$, da tocmai puterea teoretica. Tinand cont de *randamentul global (total) al instalatiei de transport*, $\boldsymbol{\eta_t}$, puterea necesara va fi data de relatia:

$$P = \frac{M_m L_M}{1000\eta_t} = \frac{M_m g H_m}{1000\eta_t} = \frac{M_v \rho g H_m}{1000\eta_t} = \frac{M_v \Delta P_T}{1000\eta_t} \qquad \text{(II.128)}$$