II.2.4.1.2. Ecuatia de continuitate pentru sisteme macroscopice

Rezolvarea unor probleme de inginerie necesita uneori aplicarea conservarii masei pentru sisteme cu dimensiuni finite denumite sisteme macroscopice. Se considera, de exemplu, *un sistem macroscopic format dintr-o conducta cu sectiune variabila*, prin care curge fluidul (fig. II.24).

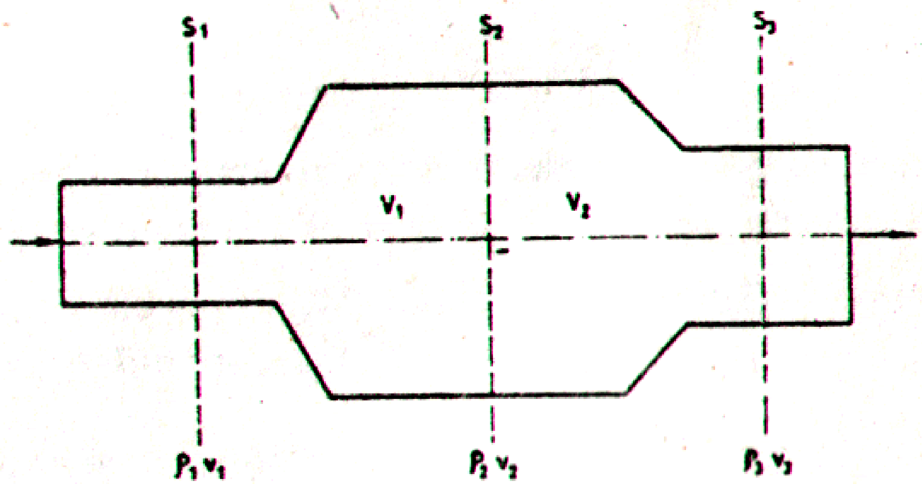

Fig. II.24
Sistem macroscopic pentru bilanţul de materiale în cazul curgerii unui fluid.

Sectiunile S_1, S_2 si S_3 delimiteaza 2 volume de control V_1 si V_2 pentru care se aplica legea conservarii masei sub forma bilantului de materiale. Acumularea de fluid este:

$$\frac{dM}{dt} = \rho_1 v_1 S_1 - \rho_2 v_2 S_2 \qquad \text{(II.83)}$$

Daca regimul este stationar dM/dt=0 si relatia de mai sus devine:

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 = M_m \qquad \text{(II.84)}$$

Prin acelasi rationament pentru volumul de control V_2 ecuatia de bilant in curgerea stationara este data de relatia:

$$\rho_2 v_2 S_2 = \rho_3 v_3 S_3 = M_m \qquad \text{(II.85)}$$

Din ultimele doua egalitati rezulta:

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 = \rho_3 v_3 S_3 = M_m \qquad \text{(II.84)}$$

Prin generalizre rezulta:

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 = \rho_3 v_3 S_3 = ...\rho_n v_n S_n = M_m = \text{const.} \qquad \text{(II.85)}$$

Pentru fluide necompresbile in curgere izoterma densitatea este constanta:

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = ...\rho_n = \rho = \text{const.} \qquad \text{(II.86)}$$

si ecuatia de continuitate devine:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 = v_3 S_3 = ...v_n S_n = \frac{M_m}{\rho} = M_v = \text{const.} \qquad \text{(II.87)}$$

Ecuatiile de mai sus se folosesc in practica pentru calculul vitezei medii intr-o sectiune de curgere data, cand se cunoaste viteza in alta sectiune sau la calcularea sectiunilor de curgere, cand se impun vitezele medii.

II.2.4.2. Ecuatiile conservarii impulsului

Pentru calculul debitului mediu sau pentru aplicarea ecuatiei de continuitate la sisteme macroscopice trebuie cunoscuta viteza medie a fluidului in sectiunea considerata. Prin definitie viteza medie intr-o sectiune este data de relatia:

$$v = \frac{1}{S}\int_S v_i dS \qquad \text{(II.88)}$$

Pentru calculul acestei integrale trebuie cunoscuta *distributia vitezelor instantanee (locale)* ,v_i in sectiunea de curgere. Functia care da distributia vitezelor este o solutie a ecuatiilor diferentiale ale impulsului.

Ecuatiile diferentiale ale impulsului exprima legea conservarii impulsului , care se aplica sub forma bilantului de impuls efectuat asupra unui volum de control delimitat ipotetic din curentul de fluid. Forma generala a bilantului de impuls pentru un volum de control ales arbitrar este:

$$\begin{bmatrix} \textit{Debit}\ (\textit{fluxul}) \\ \textit{de} \quad \textit{impuls} \quad \textit{acumulat} \\ \textit{in} \quad \textit{elemetul} \quad \textit{de} \quad \textit{volum} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textit{Debit} \quad \textit{de} \quad \textit{impuls} \\ \textit{intrat} \quad \textit{in} \\ \textit{elementul} \quad \textit{de} \quad \textit{volum} \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} \textit{Debit} \quad \textit{de} \quad \textit{impuls} \\ \textit{iesit} \quad \textit{din} \\ \textit{elementul} \quad \textit{de} \quad \textit{volum} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \textit{Suma} \quad \textit{fortelor} \quad \textit{exterioare} \\ \textit{care} \quad \textit{actioneaza} \quad \textit{asupra} \\ \textit{fluidului} \quad \textit{din} \quad \textit{elementul} \quad \textit{de} \quad \textit{volum} \end{bmatrix}$$

(II.89)

Pentru explicitarea tremenilor ecuatiei de mai sus se tine cont ca impulsul se transmite simultan prin 2 mecanisme:

- prin *mecanism molecular* pentru care fluxul de impuls este dat de produsul: $\tau \cdot A$

- prin *mecanism convectiv* pentru care fluxul de impuls este dat de: $M_v(\rho \cdot v) = (\rho \cdot v \cdot v)A$

- forte exterioare: *forte gravitationale si forte de presiune.*

Relatia generala de bilant se aplica pentru un element de volum **ΔV** de forma paralelipipedica cu dimensiunile laturilor **Δx, Δy** si **Δz** raportat la un sistem cartezian

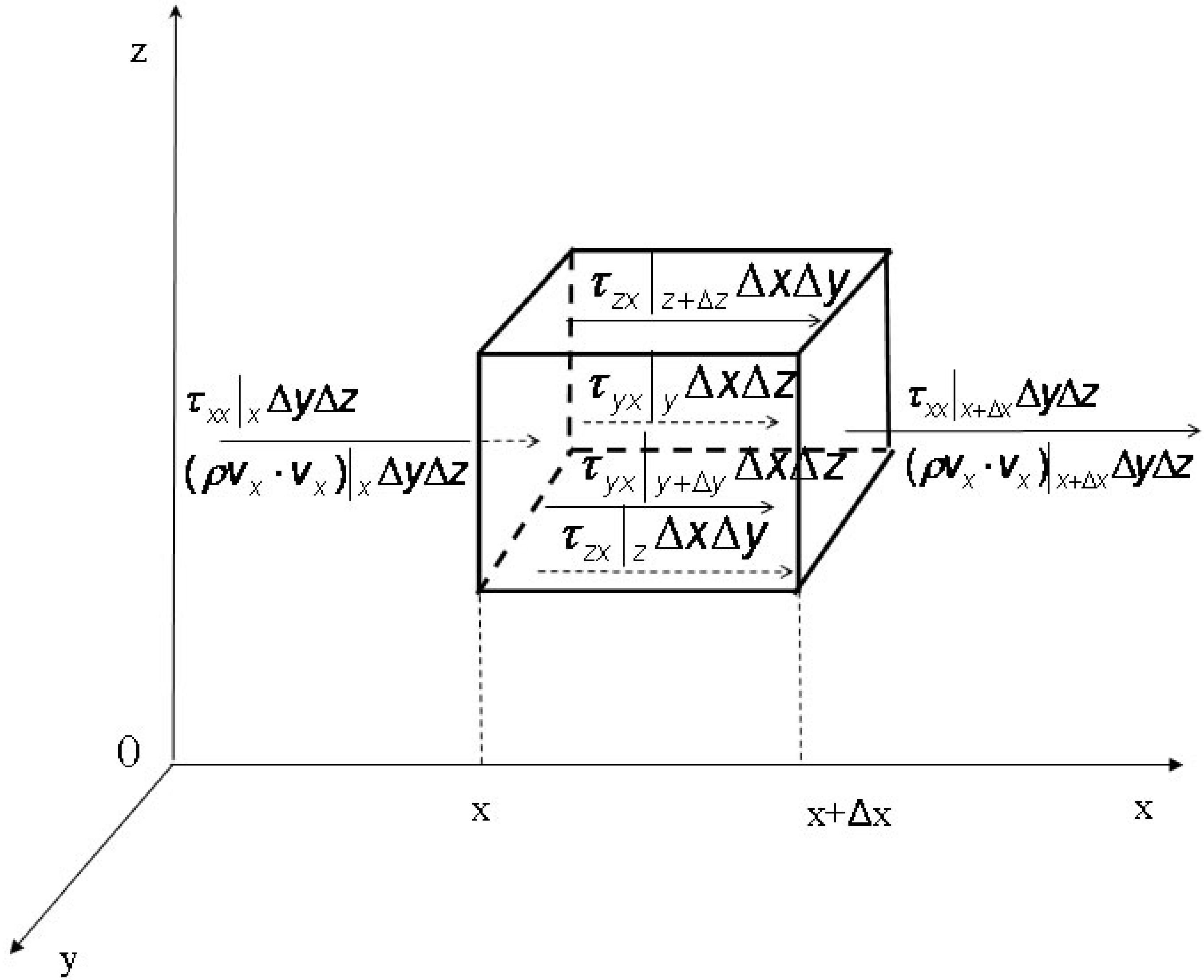

Fig. II.25
Volumul de control pentru stabilirea componentei x a ecuatiilor diferentiale ale impulsului.

Deoarece impulsul este o marime tensoriala iar viteza este o marime vectoriala se iau in considerare componentele care corespund la cele trei directii ale sistemului adoptat, iar relatia care exprima conservarea impulsului se poate aplica separat pentru fiecare directie in parte. Se obtin astfel trei componente ale ecuatiei tensoriale, cate una pentru fiecare directie.

Se prezinta in continuare deducerea componentei **x** a ecuatiilor impulsului cu mentiunea ca si componenta **y**, respectiv **z** se deduc la fel.

La aplicarea ecuatiei generale de conservare a impulsului se face precizarea ca desi se considera curgerea dupa o singura directie (**x**), impulsul se transfera atat prin *mecanism molecular* cat si *prin mecanism convectiv*, simultan dupa toate cele 3 directii ale sistemului de referinta.

Componentele fluxului de impuls intrat si iesit prin cele 6 fete ale elementului de volum considerat sunt:

- Flux de impuls prin mecanism molecular

	intrat in elementul de volum	iesit din elementul de volum
– *prin fata perpendiculara pe axa x* :	$\tau_{xx}\big\|_{x}\Delta y\Delta z$	$\tau_{xx}\big\|_{x+\Delta x}\Delta y\Delta z$
– *prin fata perpendiculara pe axa y* :	$\tau_{yx}\big\|_{y}\Delta x\Delta z$	$\tau_{yx}\big\|_{y+\Delta y}\Delta x\Delta z$
– *prin fata perpendiculara pe axa z* :	$\tau_{zx}\big\|_{z}\Delta x\Delta y$	$\tau_{zx}\big\|_{z+\Delta z}\Delta x\Delta y$

- Flux de impuls prin mecanism convectiv

	intrat in elementul de volum	iesit din elementul de volum
– *prin fata perpendiculara pe axa x* :	$\left(\rho v_x v_x\right)\Big\|_x \Delta y \Delta z$	$\left(\rho v_x v_x\right)\Big\|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$
– *prin fata perpendiculara pe axa y* :	$\left(\rho v_x v_y\right)\Big\|_y \Delta x \Delta z$	$\left(\rho v_x v_y\right)\Big\|_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z$
– *prin fata perpendiculara pe axa z* :	$\left(\rho v_x v_z\right)\Big\|_z \Delta x \Delta y$	$\left(\rho v_x v_z\right)\Big\|_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y$

Forte exterioare care actioneaza asupra volumului, dupa directia **x** sunt:

- componenta **x** a fortei gravitationale: $\rho \cdot g_x \cdot \Delta V$ (II.90)
- forta rezultanta, determinata de variatia presiunii statice

pe directia x: $\left(P\Big|_x - P\Big|_{x+\Delta x}\right)\Delta y \Delta z$ (II.91)

Acumularea de impuls in elementul de volum determina variatia in timp a *"concentratiei impulsului"*, asfel incat fluxul de impuls acumulat in elementul de volum, la curgerea dupa directia **x** poate fi exprimata prin relatia:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t}\Delta V = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t}\Delta x \Delta y \Delta z \qquad \text{(II.92)}$$

Substituirea termenilor in ecuatia de bilant conduce la:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t}\Delta V = \left(\tau_{xx}\big|_x - \tau_{xx}\big|_{x+\Delta x}\right)\Delta y\Delta z +$$

$$+\left(\tau_{yx}\big|_y - \tau_{yx}\big|_{y+\Delta y}\right)\Delta x\Delta z + \left(\tau_{zx}\big|_z - \tau_{zx}\big|_{z+\Delta z}\right)\Delta x\Delta y +$$

$$+\left[(\rho v_x v_x)\big|_x - (\rho v_x v_x)\big|_{x+\Delta x}\right]\Delta y\Delta z +$$

$$+\left[(\rho v_x v_y)\big|_y - (\rho v_x v_y)\big|_{y+\Delta y}\right]\Delta x\Delta z +$$

$$+\left[(\rho v_x v_z)\big|_z - (\rho v_x v_z)\big|_{z+\Delta z}\right]\Delta x\Delta y +$$

$$+\left(P\big|_x - P\big|_{x+\Delta x}\right)\Delta y\Delta z + \rho g_x\Delta V \qquad \text{(II.93)}$$

Prin impartire la $\Delta V=\Delta x\Delta y\Delta z$ si dupa trecerea la linita pentru: $\Delta x \to 0$; $\Delta y \to 0$ si $\Delta z \to 0$ se obtine:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) - \tag{II.94}$$

$$-\left[\frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_x v_z)}{\partial z}\right] - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x$$

Efectuand derivarea produselor si regrupand termenii, rezulta:

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)+$$

$$+v_x\underbrace{\left[\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]}_{=0 \quad \text{conform ecuatiei de continuitate}}=$$

$$=-\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)-\frac{\partial P}{\partial x}+\rho g_x \qquad \text{(II.95)}$$

Paranteza a doua din membrul stang este zero conform ecuatiei de continuitate.

Prima paranteza este prin definitie *derivata substantiala (materiala)* a componentei **x** a vectorului viteza:

$$\frac{Dv_x}{dt}=\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} \qquad \text{(II.96)}$$

Prin urmare componenta x a ecuatiilor impulsului va fi data de relatia:

$$\rho\frac{Dv_x}{dt} = -\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right) - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x \qquad \text{(II.97)}$$

Prin acelasi rationament se deduc si componentele **y** si **z**:

$$\rho\frac{Dv_y}{dt} = -\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right) - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y \qquad \text{(II.98)}$$

$$\rho\frac{Dv_z}{dt} = -\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\right) - \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z \qquad \text{(II.99)}$$

Ecuatiile deduse anterior sunt valabile indiferent de comportarea reologica a fluidului. Pentru a stabili *distributia vitezelor* tensiunile trebuiesc exprimate functie de *gradientii de viteza* utilizand *ecuatiile reologice*. De exemplu pentru un fluid newtonian, din *ecuatia reologica a fluidului Newton*, rezulta:

$$\tau_{xx} = -2\eta\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\eta\nabla v \qquad \text{(II.100)}$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = -\eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \qquad \text{(II.101)}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \qquad \text{(II.102)}$$

Efectuand derivarile, dupa inlocuire se obtine:

$$\rho\frac{Dv_x}{dt}=\eta\left[2\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\right]-\frac{\partial P}{\partial x}+\rho g_x \qquad \text{(II.103)}$$

care dupa regruparea termenilor devine

$$\rho\frac{Dv_x}{dt}=\eta\nabla^2 v_x+\frac{1}{3}\eta\frac{\partial}{\partial x}(\nabla v)-\frac{\partial P}{\partial x}+\rho g_x \qquad \text{(II.104)}$$

in care :

$$\nabla^2 v_x=\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \qquad \text{(II.105)}$$

este operatorul Laplace

Pentru celelalte 2 directii, **y** si **z** rezulta ecuatiile:

$$\rho\frac{Dv_y}{dt}=\eta\nabla^2 v_y+\frac{1}{3}\eta\frac{\partial}{\partial y}(\nabla v)-\frac{\partial P}{\partial y}+\rho g_y \qquad \text{(II.106)}$$

$$\rho\frac{Dv_z}{dt}=\eta\nabla^2 v_z+\frac{1}{3}\eta\frac{\partial}{\partial z}(\nabla v)-\frac{\partial P}{\partial z}+\rho g_z \qquad \text{(II.107)}$$

Ecuatiile de mai sus se numesc *ecuatiile Navier-Stokes*

Cazuri particulare:

a) *pentru fluide necompresibile:* $\nabla v = 0$ si ecuatiile de mai sus devin:

$$\rho\frac{Dv_x}{dt}=\eta\nabla^2 v_x-\frac{\partial P}{\partial x}+\rho g_x \qquad \text{(II.108)}$$

respectiv:

$$\rho\frac{Dv_y}{dt} = \eta\nabla^2 v_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y \qquad \text{(II.109)}$$

si:

$$\rho\frac{Dv_z}{dt} = \eta\nabla^2 v_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z \qquad \text{(II.110)}$$

b) *pentru fluide ideale,* lipsite de vascozitate *(*η=0*)*

$$\left.\begin{aligned}
\rho\frac{Dv_x}{dt} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x \\
\rho\frac{Dv_y}{dt} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y \qquad \text{(II.111)} \\
\rho\frac{Dv_z}{dt} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z
\end{aligned}\right\}$$

Cunoscute si sub numele de ecuatiile curgerii ale lui Euler

Prin integrarea ecuatiilor diferentiale ale impulsului se obtine functia care da *distributia vitezelor intr-un fluid in curgere*. Din pacate o solutie analitica a ecuatiilor diferentiale ale impulsului nu este posibila decat pentru cazuri simple de curgere. Pentru cazuri mai complicate se apeleaza la *similitudinea hidrodinamica*, asa cum s-a aratat in capitolul introductiv.