I.1.2. Deducerea criteriilor de similitudine prin analiza dimensionala

Metoda se aplica in cazul in care nu se cunosc ecuatiile diferentiale care descriu procesul, dar se cunosc variabilele care controleaza acest proces. Deducerea criteriilor de simlitudine prin analiza dimensionala se bazeaza pe *teorema* Π, enuntata de catre Buckingham. *Conform acestei teoreme procesele fizice sau fizico-chimice pot fi descrise prin functii ale criteriilor de similitudine independente ce se pot forma cu variabilele care controleaza procesul*. Se considera ca sunt independente acele criterii care nu pot fi exprimate prin combinatii aritmetice ale altor criterii.

Astfel daca un proces este determinat de **n** variabile si constante dimensionale:

$$x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots\ldots x_n \qquad \textbf{(I.12)}$$

acesta poate fi exprimat printr-o functie criteriala de forma generala:

$$f(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \ldots\ldots\ldots \Pi_{n-m}) = 0 \qquad \textbf{(I.13)}$$

Teorema Buckingham are urmatorul enunt : *numarul de criterii independente din functia criteriala este dat de diferenta* **n-r***, unde* **n** *este numarul variabilelor si constantelor dimensionale iar* **r** *este rangul matricei dimensionale, care este egal cu numarul marimilor fundamentale in functie de care se pot exprima variabilele luate in analiza*. Numarul *marimilor fundamentale* este relativ restrins si depinde de complexitatea fenomenului.

Este cunoscut din teoria sistemelor unitatilor de masura, ca pentru descrierea fenomenelor fizice numarul marimilor fundamentale este relativ restrans si depinde de complixitatea fenomenului. Astfel pentru:

• *fenomene mecanice*–sunt necesare 3 marimi fundamentale (care in S.I. sunt: *lungimea, masa* si *timpul*);

pentru:

• *fenomene termice* –sunt necesare 4 marimi fundamantale (in S.I.– *lungimea, masa, timpul si temperatura*);

iar pentru:

• *fenomene electrice* –sunt necesare 5 marimi fundamantale (in S.I.- la cele anterioare se agauga *intensitatea curentului*).

Aplicarea analizei dimensionale in vederea obtinerii criteriilor de similitudine independente se poate face prin mai multe metode:

•*metoda indicilor*

•*metoda Rayleigh*

•*metoda matricei dimensionale*

Toate acaste metode se bazeaza pe *principiul omogenitatii dimensionale a ecuatilor fizicii*.

Se va ilustra modul de deducere a criteriilor de similitudine prin *aplicarea metodei indicilor* pentru transferul de impuls. Curgerea unui fluid newtonian este influentata in principal de *7 variabile si constante dimensionale* (n=7) care sunt prezentate in tabelul urmator, impreuna cu U.M. in sistemul international.

Marimea fizica	*Simbol*	*Unitatea de masura in S.I.*
Lungimea caracteristica	l	m
Viteza fluidului	v	$m \cdot s^{-1}$
Densitatea fluidului	ρ	$Kg \cdot m^{-3}$
Vascozitatea fluidului	η	$Kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$
Tensiunea superficiala	σ	$N \cdot m^{-1} = Kg \cdot s^{-2}$
Diferenta de presiune	ΔP	$N \cdot m^{-2} = Kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$
Acceleratia gravitatiei	g	$m \cdot s^{-2}$

Cu datele din tabelul anterior se construeste matricea dimensionala care este de forma:

Exponenti	*Variabile*						
	l	v	ρ	η	σ	ΔP	g
Exponentul lui m	1	1	-3	-1	0	-1	1
Exponentul lui Kg	0	0	1	1	1	1	0
Exponentul lui s	0	-1	0	-1	-2	-2	-2

Pentru a stabili numarul de criterii se determina *rangul matricei dimensionale*. In matricea dimensionala fiecare variabila sau constanta dimensionala formeaza o coloana iar fiecare unitate de masura fundamentala formeaza un sir.

Rangul unei matrice este *dat de ordinul celui mai mare determinant*, *diferit de zero*, *care se poate construi din elementele matricei*. In cazul nostru determinantul de ordin cel mai mare ce se poate construi din elementele matricei este un determinant de ordinul 3. De exemplu, considerand elementele din primele trei coloane, rezulta determinantul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \qquad \text{(I.14)}$$

Pentru acest determinant rezulta ca rangul este **r=3** si deci numarul de criterii independente va fi: 7-3=4.

Pentru stabilrea expresiei fiecaruia dintre cele 4 criterii, prin *metoda indicelor*, se procedeaza astfel:

- se considera o relatie de dependenta intre marimi data de un produs de exponentiale, de forma generala:

$$l^{n_1} v^{n_2} \rho^{n_3} \eta^{n_4} \sigma^{n_5} \Delta P^{n_6} g^{n_7} = \text{const.} \quad (I.15)$$

Se pune conditia ca relatia de mai sus sa fie dimensional omogena. In acest scop se inlocuiesc in ecuatia (15) variabilele si constantele dimensionale prin unitatile lor de masura, exprimate in acelasi sistem de unitati (in cazul nostru in S.I)

$$[m]^{n_1}\left[m\cdot s^{-1}\right]^{n_2}\left[kg\cdot m^{-3}\right]^{n_3}\left[kg\cdot m^{-1}\cdot s^{-1}\right]^{n_4}$$

$$\left[kg\cdot s^{-2}\right]^{n_5}\left[kg\cdot m^{-1}s^{-2}\right]^{n_6}\left[m\cdot s^{-2}\right]^{n_7}=\text{const.}\qquad (I.16)$$

in care n_1, n_2, n_3……n_7 reprezinta indici necunoscuti.

Sau dupa regruparea unitatilor de masura fundamentale:

$$[m]^{n_1+n_2-3n_3-n_4-n_6+n_7}[kg]^{n_3+n_4+n_5+n_6}$$

$$[s]^{-n_2-n_4-2n_5-2n_6-2n_7}=\text{const.}\qquad (I.17)$$

Pentru ca relatia de mai sus sa fie dimensional omogena trebuie ca ambii membrii sa aiba aceleasi dimensiuni. Deorece membrul drept este o constanta adimensionala inseamna ca si membrul stang trebuie sa fie adimensional, ceea ce implica conditiile:

$$\begin{cases} n_1 + n_2 - 3n_3 - n_4 - n_6 + n_7 = 0 \\ n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = 0 \\ -n_2 - n_4 - 2n_5 - 2n_6 - 2n_7 = 0 \end{cases} \qquad (I.18)$$

S-a obtinut un sistem de ecuatii liniare, nedeterminat dar compatibil care se rezolva prin metodele cunoscute. Solutia acestuia este:

$$\begin{aligned} n_1 &= -n_4 - n_5 + n_7 \\ n_2 &= -n_4 - 2n_5 - 2n_6 - 2n_7 \qquad (I.19) \\ n_3 &= -n_4 - n_5 - n_6 \end{aligned}$$

Se foloseste solutia obtinuta in relatia (I.15):

$$l^{(-n_4-n_5+n_7)} v^{(-n_4-2n_5-2n_6-2n_7)}$$

$$\rho^{(-n_4-n_5-n_6)} \eta^{n_4} \sigma^{n_5} \Delta P^{n_6} g^{n_7} = \text{const.} \qquad (I.20)$$

care dupa regruparea factorilor devine:

$$\underbrace{\left[\frac{\rho v l}{\eta}\right]^{-n_4}}_{Re} \underbrace{\left[\frac{l v^2 \rho}{\sigma}\right]^{-n_5}}_{We} \underbrace{\left[\frac{\Delta P}{\rho v^2}\right]^{n_6}}_{Eu} \underbrace{\left[\frac{v^2}{l g}\right]^{-n_7}}_{Fr} = \text{const} \qquad (I.21)$$

In parantezele ecuatiei de mai sus se recunosc criteriile Re, Eu si Fr, prezentate in paragraful anterior. Dar fata de metoda anterioara s-a obtinut un criteriu suplimentar denumit criteriul Weber. Acest criteriu exprima raportul intre *fortele inertiale* si *fortele de suprafata datorate tensiunii superficiale*:

$$We = \frac{lv^2\rho}{\sigma} = \frac{\text{forte de inertie}}{\text{forte de suprafata}} = \text{criteriul Weber} \qquad (I.22)$$

Prin metodele expuse anterior se stabilesc criteriile independente. De multe ori insa se intalnesc procese pentru care valorile unor variabile fizice nu pot fi determinate. In astfel de situatii se inlocuieste criteriul care contine o astfel de marime cu un criteriu derivat, care se obtine prin operatii aritmetice efectuate cu criteriile independente.

Prin combinarea criteriilor independente se poate stabili teoretic un numar nelimitat de criterii derivate. De exemplu in cazul in care curgerea in interiorul unui fluid nu este determinata de o energie mecanica exterioara ci de o diferenta de densitate in interiorul fluidului (cazul *convectiei libere sau naturale*), viteza fluidului nu se poate determina deci, criteriul Reynolds nu poate fi calculat. In acest caz Reynolds este inlocuit cu un nou criteruiu denumit Galilei, definit astfel:

$$Ga = \frac{Re^2}{Fr} = \frac{gl^3\rho^2}{\eta} \qquad (I.23)$$

Pentru faze eterogne in care componentii au densitatile ρ_d pentru faza dispersa, respectiv ρ_c, pentru faza continua, se foloseste un criteriu derivat din Galilei, denumit criteriul lui Arhimede:

$$Ar = Ga\frac{\rho_d - \rho_c}{\rho_c} = \frac{l^3(\rho_d - \rho_c)\rho_c g}{\eta^2} \qquad (I.24)$$

In sisteme geometrice definite similitudinea include si similitudinea geometrica exprimata prin simplecsii de similitudine $\frac{l_1}{l_0}, \frac{l_2}{l_0}, \cdots$ care intrevin in functia criteriala genarala, si care, pentru procese hidrodinamice este de forma:

$$f\left(Re, Eu, Fr, We, \frac{l_1}{l_0}, \frac{l_2}{l_0} \ldots\ldots\ldots\right) = 0 \qquad (I.25)$$

Modelarea pe baza conceptului de regim sau proces determinant

fara

Transpunerea la scara a rezultalelor obtinute pe model prin egalarea valorii tuturor criteriilor de similitudine in model si in prototip nu este posibila intotdeauna datorita incompatibilitatii unor criterii la schimbarea scarii. De exemplu, la procesele hidrodinamice similitidinea totala implica simultan conditiile:

$$Re_1 = Re_2; \quad Fr_1 = Fr_2; \quad We_1 = We_2$$

adica:

$$\frac{\rho_1 v_1 l_1}{\eta_1} = \frac{\rho_2 v_2 l_2}{\eta_2}; \qquad \frac{v_1^2}{l_1 g} = \frac{v_2^2}{l_2 g};$$

$$\frac{l_1 v_1^2 \rho_1}{\sigma_1} = \frac{l_2 v_2^2 \rho_2}{\sigma_2}$$

Notand prin:

$$l^0 = \frac{l_2}{l_1}; \quad v^0 = \frac{v_2}{v_1}; \quad \rho^0 = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

fara

$$\eta^0 = \frac{\eta_2}{\eta_1}; \quad \sigma^0 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

rezulta:

a) din conditia $\quad Re_1 = Re_2$

$$v^0 = \frac{\eta^0}{l^0 \rho^0}$$

b) din conditia $\quad Fr_1 = Fr_2$

$$v^0 = (l^0)^{1/2}$$

c) din conditia $\quad We_1 = We_2$

fara

$$v^0 = \left(\frac{\sigma^0}{\rho^0 l^0}\right)^{1/2}$$

Rezulta ca din prima conditie $\quad (Re_1 = Re_2)$

$$v^0 \approx (l^0)^{-1}$$

din conditia $Fr_1 = Fr_2$ rezulta ca:

$$v^0 \approx (l^0)^{1/2}$$

iar din conditia $We_1 = We_2$ rezulta ca:

$$v^0 \approx (l^0)^{-1/2}$$

Aceste proportionalitati nu pot fi satisfacute simultan decat atunci cand: $l^0 = 1$ si $v^0 = 1$, adica atunci cand : $v_1 = v_2$ si $l_1 = l_2$ ceea ce inseamna ca nu s-a facut modificarea scarii.

In astfel de situatii trebuie stabilit regimul determinant al procesului.

$\boxed{\textbf{fara}}$

fara

Prin definitie fluxul unitar transferat (de impuls, caldura sau de masa) este dat de raportul dintre o *forta motoare* si *o rezistenta la transfer*.

Procesul elementar care decide viteza procesului global se numeste *proces determinant*.

Prin conceptul de *regim* se pune in evidenta procesul elementar determinant de viteza.

Procesele fizico-chimice pot avea loc in *regim hidrodinamic*, in *regim termic, difuzional, chimic* si *mixt.* De exemplu daca in cazul unui proces chimic determinant de viteza este *transferul de caldura* se spune ca procesul se desfasoara in *regim termic*.

fara

Rezulta ca pentru transpunerea la scara trebuie stablit prima data regimul procesului. Dupa stabilirea regimului se stabileste procesul elementar determinant de viteza.

De exemplu procesele de curgere au loc in *regim hidrodinamic*. Dar asigurarea unor valori identice pentru toate criteriile hidrodinamice nu este posibila datorita incompatibilitatii acestora la modificarea scarii. In aceasta situatie trebuie identificat procesul elementar determinant pentru curgere.

Rezistentele care se opun curgerii sunt determinate de: *frecari*, de *gravitatie* sau de *tensiunea superficiala.*

fara

Daca vascozitatea este determinanta pentru regimul hidrodinamic, modelarea se face din conditia: $Re_1 = Re_2$

Situatia este intalnita in cazul curgerii fortate prin sisteme inchise (conducte, utilaje, etc). Functia criteriala a curgerii se reduce la relatia:

$$Eu = f(Re, \frac{l_1}{l_0})$$

Conditia de similitudine intre model si prototip implica egalitatea:

$$Re_1 = Re_2$$

adica:

$$\frac{\rho_1 v_1 l_1}{\eta_1} = \frac{\rho_2 v_2 l_2}{\eta_2}$$

fara

Notand raportul de scara cu $l^0 = \frac{l_2}{l_1}$ si

rapoartele marimilor corespondente cu: $\rho^0 = \frac{\rho_2}{\rho_1}$; $\eta^0 = \frac{\eta_2}{\eta_1}$

$v^0 = \frac{v_2}{v_1}$; se obtin urmatoarele ecuatii de

modelare: $$v^0 = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\eta^0}{\rho^0 l^0} = \frac{\nu^0}{l^0}$$

Marimea v^0 va permite calculul vitezei v_2 din prototip cunoscand viteza v_1 in model. Functie de viteza se pot calcula alte marimi hidrodinamice importante:

-debitul volumic:

fara

$$Mv^0 = (l^0)^2 v^0 = \frac{l^0\eta^0}{\rho^0} = l^0\nu^0$$

in care: $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ este vascozitatea cinematica.

- *caderea de presiune*:

$$\Delta P^0 = \frac{\eta^0}{\rho^0 v^0 l^0}(v^0)^2\rho^0 = \frac{(\eta^0)^2}{\rho^0 (l^0)^2}$$

- *puterea necesara transportului fluidului*:

$$P^0 = Mv^0\Delta P^0 = \frac{(\eta^0)^3}{(\rho^0)^2 l^0}$$

Pentru sisteme omologe (care folosesc acelasi fluid in model si prototip) $\rho^o = 1$ respectiv $\eta^0 = 1$ si ecuatia de modelare se simplifica:

fara

$$v^0 = \frac{1}{l^0}$$

$$Mv^0 = l^0$$

$$\Delta P^0 = \frac{1}{(l^0)^2}$$

Cand determinanta este *gravitatia* sau *tensiunea superficiala* modelarea se face in raport cu criteriul Froude respectiv in raport cu criteriul Weber, procedandu-se la fel ca si in cazul in care modelarea s-a facut in raport cu Reynolds.