II.2.3. Regimuri de curgere

Curgerea poate fi caracterizata prin variatia in timp a parametrilor fluidului si prin intensitatea curgerii. Primul criteriu imparte curgerea in: *stationara (permanenta)* si *nestationara (nepermanenta).*

Curgerea stationara se caracterizeaza prin invarianta in timp a marimilor care descriu miscarea fluidului:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 0\,; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0\,; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \text{(II.56)}$$

Regimul stationar este caracteristic instalatiilor cu functionare continua.

In curgerea nestationara:

$$\frac{\partial P}{\partial t} \neq 0; \quad \frac{\partial v}{\partial t} \neq 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0 \qquad \text{(II.57)}$$

Din punctul de vedere al intensitatii curgerea poate fi *laminara* sau *turbulenta*.

Curgerea este laminara atunci cand straturile de fluid care se deplaseaza cu viteze diferite, raman paralele intre ele, fara a se amesteca la nivel macroscopic. Acest lucru este posibil atunci cand forta exterioara care intretine curgerea este comparabila cu forta de rezistenta pe care o opune fluidul, forta determinata de frecarile dintre straturile fluidului.

Intensitatea acestor frecari este caracterizata prin *vascozitatea dinamica* a fluidului.

Daca forta care intretine curgerea depaseste forta de rezistenta determinata de frecari, paralelismul straturilor nu se mai pastreaza, apar miscari dezordonate ale straturilor, care se amesteca cu formarea de *vartejuri* sau *turbioane*, a caror viteza se modifica continuu atat ca valoare cat ca directie.

Acest regim de curgere a fost denumit *regim turbulent*.

In multe cazuri trecerea de la regimul laminar la cel turbulent nu este neta, ci exista un regim de tranzitie denumit *regim intermediar*. Regimul intermediar este un regim instabil in care curgerea cu straturi paralele poate trece in curgrere cu turbioane, sau invers, in diferite momente ale curgerii sau in diferite portiuni ale traseului de curgere.

Deoarece *caracterul laminar* sau *turbulent* al curgerii depinde de intensitatea frecarilor dintre straturi, aprecierea cantitativa a intensitatii curgerii se face cu ajutorul *criteriului lui Reynolds*, care exprima raportul dintre fortele de inertie si fortele de frecare.

In forma generala expresia criteriului Reynolds este:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v l}{\eta} \qquad \text{(II.58)}$$

Marimea geometrica caracteristica, **l**, depinde de geometria curgerii. De exemplu la curgerea printr-o conducta este *diametrul interior*, la curgerea in jurul unei sfere este *diametrul sferei*, la curgrerea peste un baraj este *inaltimea barajului*, s.a.m.d.

Deci la curgerea prin conducte cu sectiunea circulara:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v d}{\eta} = \frac{v d}{\nu} \qquad \text{(II.59)}$$

Reynolds a stabilit ca regimurile hidrodinamice sunt delimitate de urmatoarele valori ale lui Re:

- *regim laminar*, pentru Re ≤ 2300

- *regim intermediar*, pentru 2300<Re<10.000;

- *regim turbulent*, pentru Re ≥ 10.000

Cand curgerea are loc prin sectiuni cu geometria diferita de cea circulara – *patrate*, *dreptunghiulare*, *inelare* sau chiar *neregulate* – in criteriul **Re** lungimea geometrica catacteristica se ia *diametrul echivalent* al sectiunii, care prin definitie este egal cu *patru raze hidraulice*. Raza hidraulica este data de raportul dintre suprafata sectiunii de curgere udata de fluid, **S**, si perimetrul sectiuni de curgere udat de fluid, **P**.

$$d_{ech} = 4 \cdot r_h = \frac{4S}{P} \qquad \text{(II.60)}$$

Este usor de aratat ca in cazul unei sectiuni circulare *diametrul echivalent* este tocmai diametrul sectiunii:

$$d_{ech} = \frac{\dfrac{4\pi d^2}{4}}{\pi d} = d \qquad \text{(II.61)}$$

Pentru o sectiune inelara formata din doua tevi concentrice:

$$d_{ech} = \frac{4\frac{\pi}{4}\left(D_i^2 - d_{ex}^2\right)}{\pi\left(D_i + d_{ex}\right)} = D_i - d_{ex} \qquad \text{(II.62)}$$

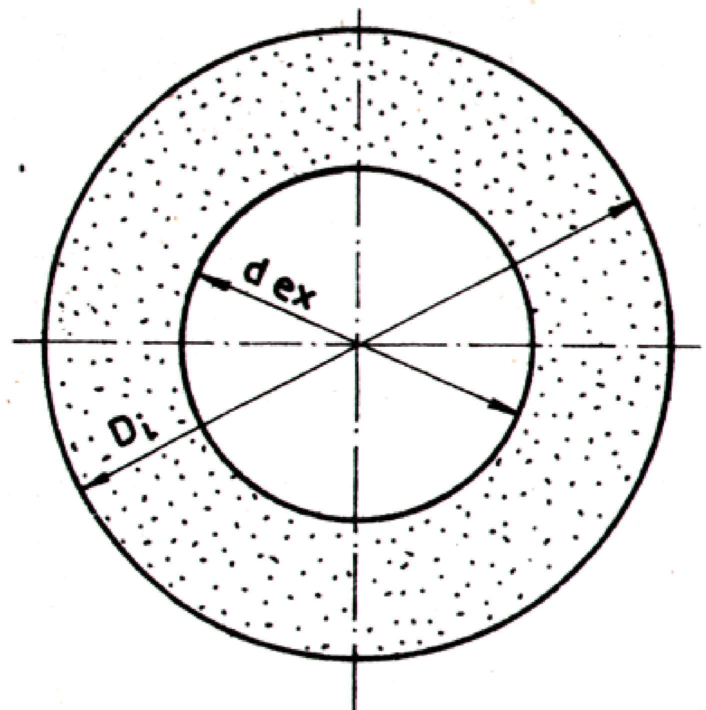

Fig. II.22
Secţiune de curgere inelară.

Pentru o sectiune patrata cu latura l

$$d_{ech} = \frac{4l^2}{4l} = l \qquad \text{(II.63)}$$

II.2.4. Ecuatii de conservare in curgerea izotetma

Pentru descrierea completa a unui caz particular de curgere trebuie solutionat un set de 5 ecuatii din care 3 sunt independentede natura fluidului. Ecuatiile independente de natura fluidului sunt *ecuatiile de conservare a masei*, *de conservare a impulsului* si *de conservare a energiei* la care se adauga:

- ecuatia reologica: $\tau = f(\dot{\gamma})$ si
- ecuatia de stare: $\rho = f(P, T)$

II.2.4.1. Ecuatia de continuitate

Ecuatia de continuitate exprima *legii conservarii masei* aplicata unui fluid in curgere. Ea se aplica sub forma unui bilant de materiale asupra unui volum considerat de fluid. Daca volumul de control are dimensiunile infinit mici rezulta *ecuatia diferentiala a continuitati*. Daca volumul are dimensiunile finite rezulta ecuatia de *continuitate pentru sisteme macroscopice*.

II.2.4.1.1. Ecuatia diferentiala a continuitatii

Pentru deducerea acestei ecuatii se delimiteaza ipotetic din curentul de fluid un volum de forma paralelipipedica cu dimensiunile laturilor: Δx, Δy si Δz Acest volum de control este raportat la un sistem de coordonate tridimensional (ortogonal).

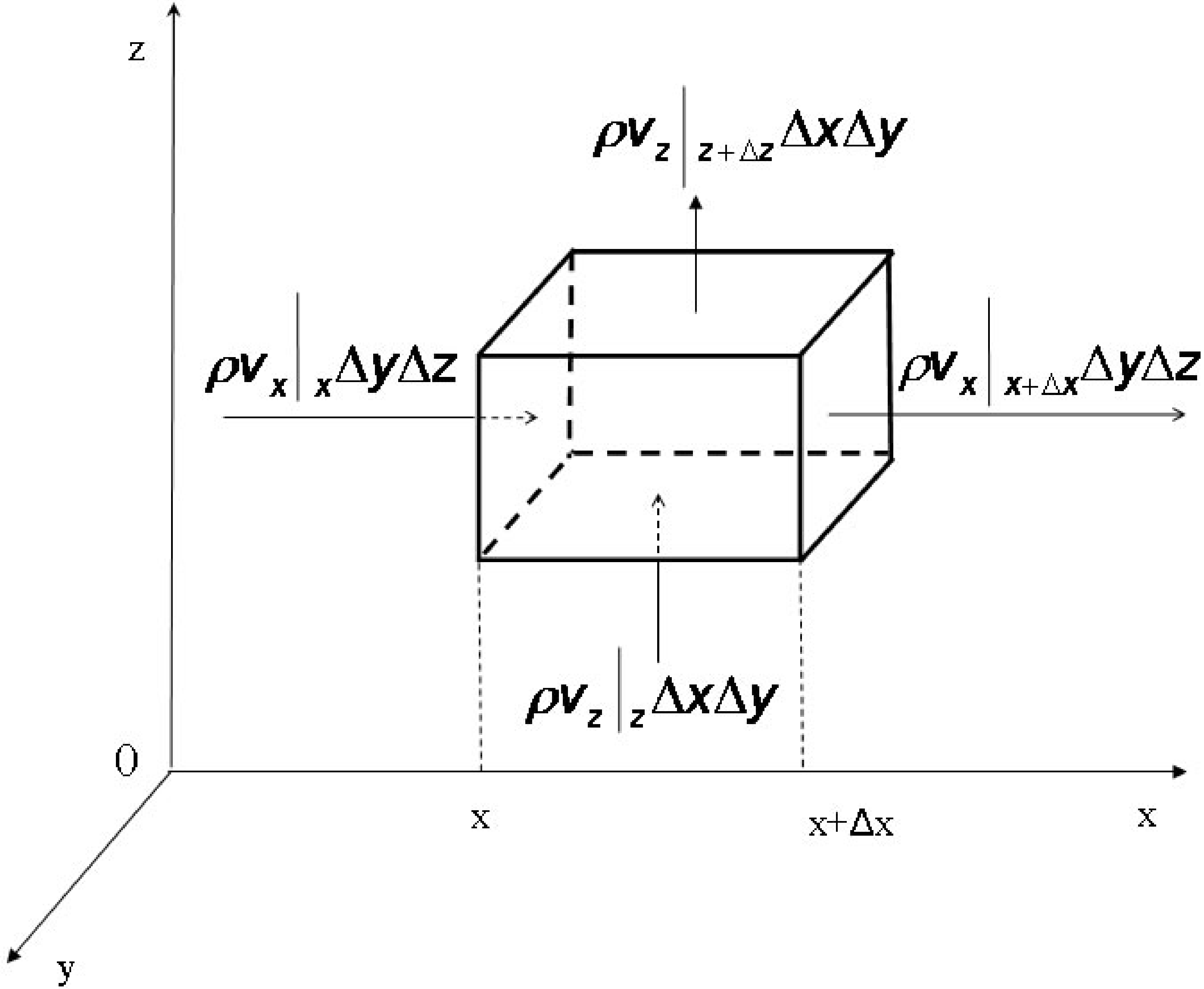

Fig. II.23
Volumul de control pentru bilantul de materiale in cazul curgerii unui fluid

Ecuatia diferentiala a continuitatii se obtine prin aplicarea *legii conservarii masei* sub forma bilantului de materiale care se exprima prin relatia generala:

$$\begin{bmatrix} Debit\ masic \\ de\ fluid\ acumulat\quad in \\ elementul\ de\ volum \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Debit\ masic \\ de\ fluid\ \mathrm{int}rat\ in \\ elementul\ de\ fluid \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Debit\ masic \\ de\ fluid\ iesit\ din \\ elementul\ de\ fluid \end{bmatrix}$$

(II.64)

Daca se considera ca fluidul curge dupa o directie oarecare, vectorul viteza se descompune in 3 componente:

v_x, v_y, v_z. Prin urmare si debitul masic de fluid se descompune dupa cele trei directii, asfel incat ecuatia generala de bilant poate fi aplicata separat pentru fiecare directie in parte. Se calculeaza astfel debitul masic acumulat la curgerea dupa fiecare directie.

Pentru curgerea dupa directia **x** tinand cont ca debitul masic este dat de produsul dintre *densitate, viteza* si *sectiunea de curgere*, rezulta ca:

$$-\text{debitul masic intrat prin fata situata la distanta } x \text{ de origine:}$$

$$\left(\rho v_x\right)\Big|_x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \qquad \text{(II.65)}$$

$$-\text{debitul masic iesit prin fata opusa,}$$

$$\text{situata la distanta } x+\Delta x \text{ de origine:}$$

$$\left(\rho v_x\right)\Big|_{x+\Delta x} \cdot \Delta y \cdot \Delta z \qquad \text{(II.66)}$$

$-$debitul acumulat la curgerea dupa directia x :

$$M_{ax} = \left[\left(\rho v_x \right) \Big|_x - \left(\rho v_x \right) \Big|_{x+\Delta x} \right] \Delta y \Delta z \qquad \text{(II.67)}$$

printr$-$un rationament similar debitul acumulat la curgerea dupa directia y va fi :

$$M_{ay} = \left[\left(\rho v_y \right) \Big|_y - \left(\rho v_y \right) \Big|_{y+\Delta y} \right] \Delta x \Delta z \qquad \text{(II.68)}$$

iar debitul acumulat la curgerea dupa directia z :

$$M_{az} = \left[\left(\rho v_z \right) \Big|_z - \left(\rho v_z \right) \Big|_{z+\Delta z} \right] \Delta x \Delta y \qquad \text{(II.69)}$$

Deci acumularea totala de fluid data de suma acumularilor pe cele trei directii va fi :

$$M_a = M_{ax} + M_{ay} + M_{az} \qquad \text{(II.70)}$$

Pe de alta parte acumularea de fluid in volumul de control va determina variatia in timp a densitatii fluidului, si deci:

$$M_a = \frac{\partial \rho}{\partial t}\Delta V = \frac{\partial \rho}{\partial t}\Delta x \Delta y \Delta z \qquad \text{(II.71)}$$

Prin urmare bilantul de materiale pentru intregul element de volum se va exprima prin relatia:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\Delta x \Delta y \Delta z = \left[(\rho v_x)\big|_x - (\rho v_x)\big|_{x+\Delta x}\right]\Delta y \Delta z + \left[(\rho v_y)\big|_y - (\rho v_y)\big|_{y+\Delta y}\right]\Delta x \Delta z + \left[(\rho v_z)\big|_z - (\rho v_z)\big|_{z+\Delta z}\right]\Delta x \Delta y \qquad \text{(II.72)}$$

Prin impartire la $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ si trecand la limita facand: $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ si $\Delta z \to 0$, rezulta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\rho v_x\right)\big|_x - \left(\rho v_x\right)\big|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\left(\rho v_y\right)\big|_y - \left(\rho v_y\right)\big|_{y+\Delta y}}{\Delta y} +$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\left(\rho v_z\right)\big|_z - \left(\rho v_z\right)\big|_{z+\Delta z}}{\Delta z} \qquad \text{(II.73)}$$

Tinand cont de definitia derivatei partiale de ordinul I, ecuatia devine:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left[\frac{\partial\left(\rho v_x\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\rho v_y\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\rho v_z\right)}{\partial z}\right] \qquad \text{(II.74)}$$

Efectuand derivarea produselor din membrul drept si regrupand termenii se obtine:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \qquad \text{(II.75)}$$

Suma termenilor din partea stanga a relatiei de mai sus este derivata materiala (substantiala) a densitatii

$$\frac{D\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \qquad \text{(II.76)}$$

iar termenii din paranteza membrului drept reprezinta divergenta vectorului viteza:

$$\text{div } v = \nabla v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad \text{(II.77)}$$

Cu aceste notatii, ecuatia diferentiala a continuitatii se exprima, intr-o forma restransa, prin relatia:

$$\frac{D\rho}{dt} = -\rho\left(\nabla v\right) \qquad \text{(II.78)}$$

Relatia de mai sus reprezinta forama cea mai generala a ecuatiei diferentiale a continuitatii. Aceasta poate lua forma forme mai simple pentru cazuri particulare ale curgeri, astfel:

- pentru curgerea stationara: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$; (II.79)

- pentru curgerea unui fluid necompresibil (pentru care densitatea nu se modifica nici in timp si nici in spatiu):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0;$$

si deci:

$$\nabla v = 0 \tag{II.80}$$

– la curgerea dupa o singura directie

$v_x \neq 0; \quad v_y = 0$ si $v_z = 0$ si ecuatia continuitatii devine :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial v_x}{\partial x} \tag{II.81}$$

– pentru fluid incompresibil la curgerea dupa o singura directie (de exemplu directia x) :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow v_x = \text{constant} \tag{II.82}$$

Adica la curgerea stationara a unui fluid necompresibil viteza unui strat nu se schimba pe directia de curgere.